

### Wurzelfunktion

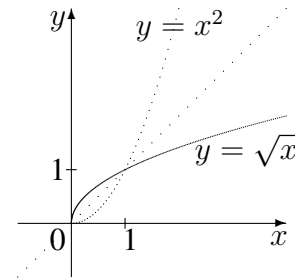
Die Wurzelfunktion  $f$  mit  $y = \sqrt{x}$  ist die Umkehrfunktion (siehe unten) zur Quadratfunktion mit  $y = x^2, x \geq 0$ .

Definitionsbereich:  $D_f = \mathbb{R}_0^+ = [0; \infty[$ .

Funktionsgraph: Halbparabel (siehe Skizze).

Schreibweise mit Potenz:  $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ .

Ableitung  $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, D_{f'} = \mathbb{R}^+ = ]0; \infty[$ , wobei im Nullpunkt eine senkrechte Tangente vorliegt.

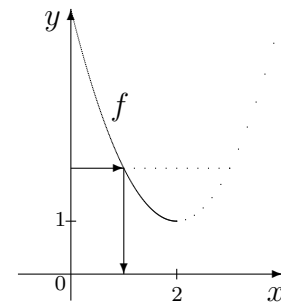


### Umkehrfunktion

Beispiel: Gesucht ist die Umkehrfunktion zu

$$f(x) = x^2 - 4x + 5, D_f = ]-\infty; 2], W_f = [1; \infty[$$

Umkehrung bedeutet, zu jedem  $y$ -Wert jetzt umgekehrt den  $x$ -Wert zu finden; damit dies eindeutig möglich ist, muss bei der hier vorliegenden quadratischen Funktionsgleichung der Definitionsbereich eingeschränkt werden, z. B. auf den linken Parabelast wie in der Skizze.



Gleichung schreiben:  $y = x^2 - 4x + 5, x \leq 2, y \geq 1$

Variablentausch  $x \leftrightarrow y$  (auch bei  $D_f, W_f$ ):  $x = y^2 - 4y + 5, y \leq 2, x \geq 1$

Nach  $y$  auflösen:  $y^2 + 4y + 5 - x = 0; y_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4 - 5 + x} = 2 \pm \sqrt{x - 1}$

Blick auf  $D_f = W_{f^{-1}}$  liefert:  $y = 2 - \sqrt{x - 1}$ , da  $y \leq 2$

Also:  $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x - 1}, D_{f^{-1}} = W_f, W_{f^{-1}} = D_f$

In der Zeichnung ist der Graph an der Winkelhalbierenden des 1./3. Quadranten zu spiegeln (siehe auch Bild oben bei der Wurzelfunktion).

### Kurvenscharen: Funktionsterme mit Parameter ( $\rightarrow$ grund108.pdf)

Beim Differenzieren ist zu unterscheiden zwischen der Variablen  $x$ , nach der differenziert wird, und dem Parameter (z. B.  $a, k, t, \dots$ ), der die Rolle einer Konstanten spielt, somit wie eine feste Zahl behandelt wird und nach dem nicht differenziert wird.

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2ax^2 + a^2x - 2a^3 \\ f'(x) &= 3x^2 - 2a \cdot 2x + a^2 = 3x^2 - 4ax + a^2 \\ f''(x) &= 6x - 4a \end{aligned}$$

Je nachdem, welchen Wert man für den Parameter einsetzt, erhält man verschiedene Funktionen, also eine ganze Schar von Kurven, z. B.

$$a = -1: f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2 \quad a = 0: f(x) = x^3 \quad a = 1: f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$$

Zum Teil können diese Kurven ganz unterschiedlich aussehen, d. h. bei Funktionsuntersuchungen, die man allgemein mit dem Parameter rechnet, sind eventuell Fallunterscheidungen notwendig.

Beispiel:  $f(x) = x^3 - 2ax^2 + a^2x - 2a^3$

Punkte mit waagrechter Tangente:  $f'(x) = 0: 3x^2 - 4ax + a^2 = 0;$

$$x_{1/2} = \frac{4a \pm \sqrt{16a^2 - 4 \cdot 3 \cdot a^2}}{2 \cdot 3} = \frac{4a \pm 2a}{6}. \quad x_1 = \frac{1}{3}a, x_2 = a. \quad \text{Ob Max oder Min, hängt von } a \text{ ab:}$$

$a < 0$  (Zahlenbeispiel rechnen!):

$$\begin{array}{c} f' > 0 \quad f' < 0 \quad f' > 0 \\ \text{steigt} \quad a \quad \text{fällt} \quad \frac{1}{3}a \quad \text{steigt} \\ \text{Max} \quad \text{Min} \\ (a|-2a^3) \quad (\frac{1}{3}a|-\frac{50}{27}a^3) \end{array}$$

$a = 0$ :

$$\begin{array}{c} f' > 0 \quad f' > 0 \\ \text{steigt} \quad 0 \quad \text{steigt} \\ \text{TerrP} \\ (0|0) \end{array}$$

$a > 0$ :

$$\begin{array}{c} f' > 0 \quad f' < 0 \quad f' > 0 \\ \text{steigt} \quad \frac{1}{3}a \quad \text{fällt} \quad a \quad \text{steigt} \\ \text{Max} \quad \text{Min} \\ (\frac{1}{3}a|-\frac{50}{27}a^3) \quad (a|-2a^3) \end{array}$$