11. Klasse TOP 10 Grundwissen 11
Differentiationsregeln 05

Allgemeines → grund112.pdf, Wurzeln, Parameter → grund114.pdf

Ableitungsformeln:

$f(x)$	1	x	x^2	x^n	$\frac{1}{x}=x^{-1}$	$\sqrt{x}=x^{1/2}$	$\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$	$\sin x$	$\cos x$
$f'(x)$	0	1	$2x$	nx^{n-1}	$-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2}x^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}=\frac{1}{n}x^{\frac{n-1}{n}}$	$\cos x$	$-\sin x$

Viele Funktionen lassen sich auf x^n zurückführen, z. B. $g(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$. Die Ableitung ergibt sich dann mit „alter Exponent 'runter, neuer ist um 1 kleiner“: $g'(x)=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$.
In manchen Fällen (insbes. bei Wurzeln) kann es sein, dass die Ableitung einen kleineren Definitionsbereich als die Funktion selbst hat. Exponential- und Logarithmusfunktion → grund116.pdf und grund117.pdf

Produktregel: $f(x)=u(x)\cdot v(x)\Rightarrow f'(x)=u(x)v'(x)+u'(x)v(x)$
„Das erste lassen mal das zweite differenzieren plus das erste differenzieren mal das zweite lassen“
Beispiel: $f(x)=x\cdot\sin x\Rightarrow f'(x)=x\cdot\cos x+1\cdot\sin x$

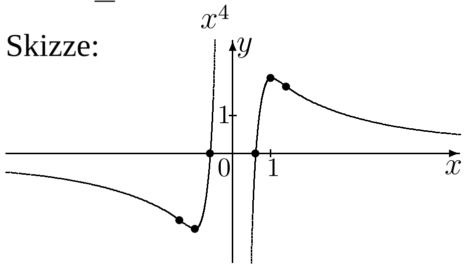
Quotientenregel: $f(x)=\dfrac{z(x)}{n(x)}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{n(x)\cdot z'(x)-z(x)\cdot n'(x)}{[n(x)]^2}=\dfrac{NAZ-ZAN}{N^2}$
(„Nenner mal Ableitung des Zählers minus Zähler mal Ableitung des Nenners durch Nenner im Quadrat“)
Beispiel: $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-5}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{(x^2-5)\cdot 3x^2-x^3\cdot 2x}{(x^2-5)^2}=\dfrac{x^4-15x^2}{(x^2-5)^2}$
Tipps: Nenner nicht ausmultiplizieren; bei nochmaligem Differenzieren kürzen; manchmal lässt sich ein Nenner bequemer mit „hoch -1“ schreiben oder „auseinanderziehen“, Beispiel: $f(x)=\frac{x^2-5}{x^3}=\frac{1}{x}-\frac{5}{x^3}=x^{-1}-5x^{-3}$.

Kettenregel:
Begriff der Verkettung von Funktionen:
Beispiel: $f(x)=\sin(x^2)$ bedeutet: Zuerst x^2 („Inneres“), dann $\sin$ davon nehmen („äußere Funktion“)
Differenzieren verketteter Funktionen $f(x)=u(v(x))$: $f'(x)=u'(v(x))\cdot v'(x)$
„Das Äußere differenzieren und das Innere einsetzen mal das Innere nachdifferenzieren“.
Beispiele: $f(x)=\sin(x^2)\Rightarrow f'(x)=\cos(x^2)\cdot 2x$
$g(x)=(x^2-5x)^7\Rightarrow g'(x)=7(x^2-5x)^6\cdot(2x-5)$
$h(x)=\sqrt{\sin x^2}\Rightarrow h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\sin x^2}}\cdot\cos x^2\cdot 2x$

Beispiel: Untersuchung („Diskussion“) der Bruchfunktion $f(x)=\dfrac{3x^2-1}{x^3}$
(Siehe auch grund111.pdf, grund109.pdf, grund113.pdf; Wendepunkte → 12. Klasse)
Definitionsbereich: Wegen des Nenners ist $D_f=\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Asymptoten: Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$ ist $y=0$ waagrechte Asymptote;
wegen des Nenners ist $x=0$ senkrechte Asymptote (Pol 3. Ordnung) mit $\lim\limits_{x\to 0\pm 0}f(x)\to\mp\infty$
Symmetrie: $f(-x)=-f(x)$, also Punktsymmetrie zum Ursprung.
Nullstellen: $f(x)=0$; $3x^2-1=0$; $x_{1/2}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\approx\pm 0{,}58$
Extrema und Monotonie: $f'(x)=\dfrac{x^3\cdot 6x-(3x^2-1)\cdot 3x^2}{x^6}\overset{\text{kürzen!}}{=}\dfrac{-3x^2+3}{x^4}$
$f'(x)=0\Rightarrow -3x^2+3=0\Rightarrow x=\pm 1$

$f'<0$		$f'>0$		$f'>0$		$f'<0$
fällt	-1	steigt	0	steigt	1	fällt
	Min $(-1\mid -2)$		$\notin D_f$		Max $(1\mid 2)$	

Skizze:



Wertebereich (d. h. vorkommende y-Werte): $W_f=\mathbb{R}$