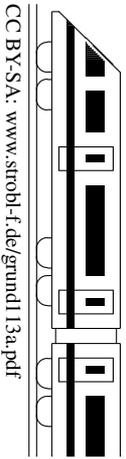


11. Klasse TOP 10 Grundwissen (alter LP)	11
Tangenten, Extrema, Newton-Verfahren	03



Tangenten an den Funktionsgraphen von f im Punkte $P(x|y)$:

Zunächst bestimmt man den y -Wert durch Einsetzen von x in $f(x)$.

Ansatz für die Tangentengleichung: $y = mx + t$

Die Steigung m erhält man mit der Ableitung an der Stelle x : $m = f'(x)$.

Den y -Achsenabschnitt t erhält man durch Einsetzen der Punktkoordinaten.

Beispiel: $f(x) = x^2 - 8x + 1, P(2|?)$.

y -Wert: $f(2) = -11$, also $P(2|-11)$.

Steigung: $f'(x) = 2x - 8, f'(2) = -4$. Also Tangente: $y = -4x + t$.

P einsetzen: $-11 = -4 \cdot 2 + t \Rightarrow t = -3$. Also Tangente: $y = -4x - 3$.

Zum Aufstellen der Tangentengleichung an der Stelle x_0 kann auch direkt die Formel $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ verwendet werden.

Den **Schnittwinkel** α einer Geraden $g(x) = mx + t$ mit der x -Achse und den **Neigungswinkel der Tangente** erhält man mit $m = \tan \alpha$.



Mit der SHIFT-tan- bzw. INV-tan-Funktion des Taschenrechners erhält man dann α .

Beispiel: $g(x) = -4x - 3. m = -4 = \tan \alpha \Rightarrow \alpha \approx -75,96^\circ$.

Normale: Unter einer Normalen versteht man in der Mathematik eine senkrecht stehende Gerade. Zu einer vorgegebenen Steigung m_1 erhält man die Steigung m_2 der Normalen mit der Gleichung $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Extrema und Monotonie:

$f'(x)$ bilden, $f'(x) = 0$.

Vorzeichenbereiche von f' ermitteln (\rightarrow grund107.pdf, dabei auch eventuelle Definitionslücken markieren).

Monotonie: $f' > 0$: Graph steigt in diesem Bereich streng monoton; $f' < 0$: fällt.

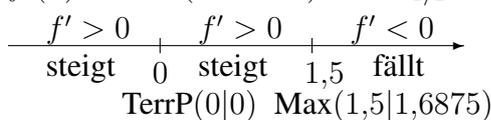
Dazwischen je nach Situation: Definitionslücke, (lokales) Maximum (steigt-fällt), (lokales) Minimum (fällt-steigt), Terrassenpunkt (fällt-fällt oder steigt-steigt).

Die y -Koordinaten dieser Punkte ermittelt man durch Einsetzen in den Original-Funktions-term $f(x)$ ganz oben.

Beispiel: $f(x) = -x^4 + 2x^3, D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = -4x^3 + 6x^2$

$f'(x) = 0: x^2(-4x + 6) = 0; x_{1/2} = 0, x_3 = 1,5$.



Eventuell könnten an den Rändern des Definitionsbereichs globale Maxima/Minima auftreten. Wäre hier z. B. $D_f = [-2; 2]$, so wäre $(-2|-32)$ ein globales Minimum. Eigentlich sollte man beim x -Wert besser Maximal-/Minimalstelle, beim Punkt besser Hochpunkt/Tiefpunkt sagen.

Newton-Verfahren:

Zur näherungsweise Bestimmung von Nullstellen wird folgende Iterations-Idee verwendet:

- Wahl eines geeigneten Startwertes x_0 .
- Berechnung der Tangente t im Punkt $P_0(x_0|f(x_0))$:
 $t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.
- Berechnung der Nullstelle x_1 der Tangente:
 $t(x) = 0$ liefert $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

In der Regel ist x_1 ein besserer Näherungswert für die gesuchte Nullstelle von f (siehe Abb.).

- Wiederholte Anwendung dieses Verfahrens mit x_1 usw. als neuem Startwert.

