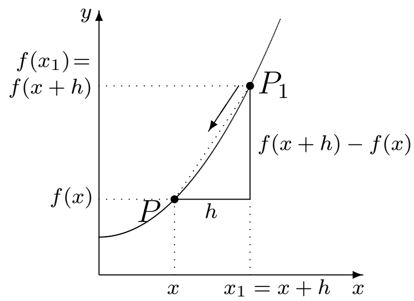
11. Klasse TOP 10 Grundwissen (alter LP) 11
Differenzieren 02

Zweck: Das Differenzieren (Ableiten) einer Funktion f dient zur Betrachtung lokaler Änderungsraten, d. h. zur Bestimmung der Steigung eines Funktionsgraphen.

Während man mit der Sekante zwischen zwei Graphen-Punkten $P(x|f(x))$ und $P_1(x_1|f(x_1))$ mit Hilfe des **Differenzenquotienen**

$$\overline{m} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

nur die durchschnittliche Änderung von $f(x)$ pro „Zeitabschnitt“ $x_1 - x$ erhält, erhält man die lokale Änderungsrate, d. h. die Steigung der Tangente an der Stelle x, wenn man den Punkt P_1 immer näher zum Punkt P schiebt; d. h. die Tangentensteigung ist gegeben durch



$$m = \lim_{x_1 \to x \pm 0} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x},$$

bzw. anders ausgedrückt, indem man den Abstand h zwischen den betrachteten x-Werten „infinitesimal klein“ macht:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x \pm h) - f(x)}{\pm h}.$$

Die **Ableitungsfunktion** f' gibt zu jedem x-Wert die Steigung m an dieser Stelle an:

$$f'(x) = m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x \pm h) - f(x)}{\pm h}.$$

Interpretation als Änderungsrate: Beispiele:

$f(x)$	$f'(x)$
Ort zur Zeit x	Geschwindigkeit zur Zeit x
Anzahl Scheidungen bis zum Jahr x	Scheidungsrate (Scheidungen pro Jahr) im Jahr x

Ableitung von Potenzfunktionen (weitere → grund116.pdf):

$f(x)$	Konstante c	x	x^2	x^3	x^n
$f'(x)$	0	1	$2x$	$3x^2$	nx^{n-1}

(„alter Exponent ’runter, neuer um 1 kleiner“)

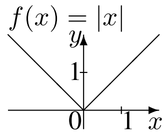
Konstanten fallen bei Addition weg und bleiben bei Multiplikation erhalten; Summen und Differenzen können gliedweise differenziert werden, z. B.

$f(x) = x^4 + 7 \qquad f'(x) = 4x^3$
$f(x) = 7x^4 \qquad f'(x) = 7 \cdot 4x^3 = 28x^3$
$f(x) = 7x^4 + x^2 \qquad f'(x) = 28x^3 + 2x$

Differenzierbarkeit

Die Tangentensteigung an einer Stelle kann nicht bestimmt werden, wenn der Funktionsgraph nicht glatt verläuft, sondern dort Sprünge oder Knicke aufweist. Die Funktion ist dann nicht differenzierbar an dieser Stelle.

Beispiel: Betragsfunktion $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$



Stammfunktion

Umgekehrt ist eine Stammfunktion einer gegebenen Funktion f eine Funktion F, deren Ableitung f ergibt:

$$F'(x) = f(x).$$

F ist daher nur bis auf eine additive Konstante bestimmt.

Beispiel: $f(x) = x^2$ hat die Stammfunktionen $F_c(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$, z. B. $F_0(x) = \frac{1}{3}x^3$ oder $F_5(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5$.