

Differentiation von Bruchfunktionen → grund115.pdf, ueb115.pdf

Beispiel: $f(x) = \frac{x^2}{2x+2}$

Definitionslücke: Nenner $2x+2=0$ ergibt $x = -1$, also Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Nullstelle: $f(x) = 0$ ergibt Zähler $x^2 = 0$, also $x_{1/2} = 0$ (doppelt).

Verhalten in der Nähe der Definitionslücke:

Mit dem Grenzwert $\lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} f(x)$ wird das rechts- bzw. linksseitige Verhalten der Funktion in der Nähe der Definitionslücken ermittelt, d. h. für x -Werte wie $-0,99$ („ -1 plus ein bisschen“) bzw. $-1,01$ („ -1 minus ein bisschen“).

Im Folgenden: Rechtsseitig (oberes Vorzeichen), linksseitig (unteres Vorzeichen)¹:

Symbolisch notiert man²:

$$\lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} f(x) = \frac{(-1 \pm 0)^2}{-1 \pm 0 + 1} = \frac{+1}{\pm 0} \rightarrow \pm \infty$$

Man denke sich -1 ± 0 für x eingesetzt

Wichtig ist hierbei, das Vorzeichen im Nenner zu betrachten und sich klar zu machen, dass „2 geteilt durch eine sehr kleine Zahl sehr groß wird“.

Bedeutung: Der Graph hat die senkrechte Asymptote $x = -1$, hier wegen des Nenners $2x+2 = 2(x+1)^1$ Pol erster Ordnung mit Vorzeichenwechsel (→ ueb111.pdf, Aufgabe 2).

h-Methode:

Formal etwas sauberer als obige symbolische Notation ist das Einsetzen von $-1 \pm h$ für x , wobei h „klein“ ist:

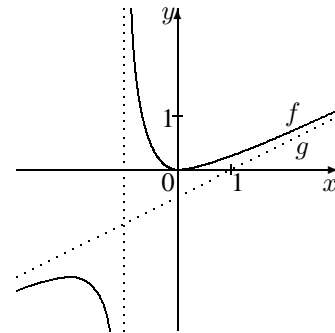
$$\lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(-1 \pm h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1 \pm h)^2}{2(-1 \pm h) + 2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 \pm 2h + h^2}{\pm 2h} \rightarrow \pm \infty$$

(Hier sind wieder die Vorzeichen im Zähler $(+1)$, der Rest spielt keine Rolle, da sehr klein) und Nenner (\pm) zu betrachten, um das Vorzeichen $\pm \infty$ zu ermitteln.)

Schräge Asymptote, wenn der Grad des Polynoms im Zähler um 1 größer als der Grad des Polynoms im Nenner ist:

Polynomdivision: $f(x) = x^2 : (2x+2) = \underbrace{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}_{g(x)} + \underbrace{\frac{2}{2x+2}}_{\rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \pm \infty}$

Somit ist $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ der Term der schrägen Asymptote, an die sich der Graph im Unendlichen anschmiegt.



Spezialfall hebbarer Definitionslücken:

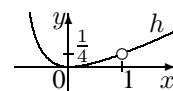
Beispiel: $h(x) = \frac{x^3 - x^2}{2x^2 - 2}$

Definitionslücken: Nenner $2x^2 - 2 = 0$ liefert $x = \pm 1$.

Nullstellen: Zähler $x^3 - x^2 = x^2(x-1) = 0$ liefert $x_{1/2} = 0$ (doppelte Nullstelle) und $x_3 = 1$ (keine Nullstelle, da Definitionslücke).

Hier ist wegen $h(x) = \frac{x^2(x-1)}{2(x+1)(x-1)} = \frac{x^2}{2(x+1)}$ zwar wie oben bei der einen Definitionslücke

$\lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} h(x) \rightarrow \pm \infty$, aber bei der anderen Definitionslücke $\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} h(x) = \frac{1}{4}$ (→ ueb111.pdf, Aufgabe 3), so dass sich in der Nähe der Definitionslücke $x = 1$ die Funktionswerte dem Wert $y = \frac{1}{4}$ nähern.



Waagrechte Asymptote, wenn Grad des Zähler-Polynoms \leq Grad des Nenner-Polynoms, z. B. $f(x) = \frac{3x-1}{2x-2}$ hat waagrechte Asymptote $y = 1,5$ (→ grund87.pdf).

¹Es empfiehlt sich, zuerst „rechtsseitig“ zu betrachten und dann für „linksseitig“ mit Farbstift die Vorzeichen an den entsprechenden Stellen zu ändern.

²Für diese symbolische Notation ist manchmal ein Faktorisieren des Funktionsterms nötig, weitere Hinweise → ueb111.pdf, Aufgabe 1.

