11. Klasse TOP 10 Grundwissen (alter LP) 11
Steckbriefaufgabe, Optimierung 10

Steckbriefaufgabe (d. h. gesucht ist eine Funktion mit vorgegebenen Eigenschaften)
Steckbrief-Beispiel: Gesucht ist eine zur y-Achse achsensymmetrische Polynomfunktion 4. Grades mit Min$(2|1)$ und Schnitt der y-Achse bei $y = 2$.
Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, wegen der geforderten Achsensymmetrie werden nur gerade Exponenten gewählt, also $f(x) = ax^4 + cx^2 + e$.

$$f'(x) = 4ax^3 + 2cx$$

Die gegebenen Informationen werden jetzt „abgearbeitet" und mit Hilfe des Ansatzes umgesetzt; für drei unbekannte Parameter werden drei Gleichungen benötigt.

Min$(2\|1)$ bringt zwei Informationen:	Steigung bei $x = 2$ ist 0:	$f'(2) = 0$:	$4a \cdot 8 + 2c \cdot 2 = 0$
	Punkt $(2\|1)$:	$f(2) = 1$:	$16a + 4c + e = 1$
Ferner:	Punkt $(0\|2)$:	$f(0) = 2$:	$e = 2$

Lösen dieses Gleichungssystems: $e = 2$ eingesetzt:

$32a + 4c = 0 \qquad | \cdot 1$
$16a + 4c = -1 \qquad | \cdot (-1)$

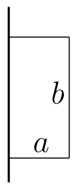
$16a = 1$, also $a = \frac{1}{16}$, somit (aus $32a+4c = 0$): $c = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$. Also: $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 2$
Nachrechnen zeigt, dass bei $x = 1$ tatsächlich ein Min vorliegt:
$f'(x) = \frac{1}{4}x^3 - x = x(\frac{1}{4}x^2 - 1) = 0$ liefert $x_1 = 0$, $x_{2/3} = \pm 1$.

$f' < 0$ $f' > 0$
-1 0 fällt 1 steigt

Spezialfall: Geradengleichungen aufstellen
Fall 1: Gegeben sind Steigung m und Punkt $P(x_1|y_1)$:
Ansatz $y = mx + t$ mit gegebenem m. Einsetzen der Punktkoordinaten für x und y liefert t.
Fall 2: Gegeben sind zwei Punkte $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$:
Steigungsdreieck: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Weiter mit m und P wie in Fall 1.

Anwendung: Modellieren mit Funktionen
Gelegentlich kommt je nach Fragestellung anstelle einer Polynomfunktion auch ein Ansatz mit einem anderen Funktionstyp (z. B. Exponentialfunktion, Bruchfunktion, trigonometrische Funktion) in Frage, wobei wieder ein Ansatz mit Parametern aufgestellt wird und diese mit gegebenen Funktionseigenschaften bestimmt werden.

Optimierungsaufgabe (Extremwertaufgabe)
Beispiel: Mit einer 50 m^2-Grassamen-Packung soll entlang einer Mauer eine rechteckige Fläche angelegt werden, die möglichst wenig Zaun zur Eingrenzung benötigt. Hier im Folgenden: Rechnung in der Einheit m.



Rezept: „GNADE":
Größe, die extremal werden soll, mit Berechnungsformel: Zaunlänge $l = 2a + b$
Nebenbedingung: Fläche $a \cdot b = 50$ (Braucht man, wenn mehrere Unbekannte [hier: a, b] vorliegen, um eine Unbekannte durch die andere auszudrücken)
Ausdrücken der zu optimierenden Größe durch Funktion einer Variablen:
N liefert $b = \frac{50}{a}$, Einsetzen in G liefert $l = 2a + \frac{50}{a}$
Umbenennung $a \leftrightarrow x$ liefert Funktion: $f(x) = 2x + \frac{50}{x}$
Differenzieren: $f'(x) = 2 - 50x^{-2} = 2 - \frac{50}{x^2}$
Extremwerte suchen und Ergebnis schreiben: $f'(x) = 0$ liefert $x^2 = 25$, $x = \pm 5$

$f' < 0$ $f' > 0$
-5 fällt 5 steigt
nicht sinnvoll   Min

Ergebnis: Die kleinste Zaunlänge ergibt sich für $a = 5$, $b = \frac{50}{5} = 10$ (aus N), und sie beträgt $l = 2a + b = 20$.