11. Klasse TOP 10 Grundwissen — 11
Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit — 10

Grundbegriffe (→ grund85.pdf und → ueb110.pdf, Aufgabe 1):
Alle möglichen Versuchsergebnisse eines Zufallsexperiments werden als Elemente eines **Grundraums** Ω zusammengefasst, dessen Teilmengen E die sog. **Ereignisse** sind. Jedem Ereignis E ist seine **Wahrscheinlichkeit** $P(E)$ zugeordnet. Diese Zuordnung P muss die **Kolmogorow-Axiome** erfüllen, aus denen die folgenden **Rechenregeln** folgen:
$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$ und $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

Verknüpfte Ereignisse, Schreib- und Sprechweisen
$\overline{E}$ (Komplement, Gegenereignis, nicht-E)
$E_1 \cap E_2$ (E_1 und E_2, **beide** Ereignisse treten ein)
$E_1 \cup E_2$ (E_1 oder E_2; mindestens eines der Ereignisse tritt ein).
(In der Mathematik dürfen bei „oder" auch beide Ereignisse eintreten, sofern nichts anderes dasteht).
$\overline{E_1 \cap E_2} = \overline{E_1} \cup \overline{E_2}$ (Höchstens eines der Ereignisse tritt ein)
$\overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E_1} \cap \overline{E_2}$ (keines der Ereignisse tritt ein)
$(\overline{E_1} \cap E_2) \cup (E_1 \cap \overline{E_2})$ (Genau eines der beiden Ereignisse tritt ein)
$E_1 \cap E_2 = \{\}$ (E_1 und E_2 sind unvereinbar, disjunkt)

Unabhängigkeit
Zwei Ereignisse A, B heißen unabhängig, falls $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Hinweise
- Falls A und B unabhängig sind, so gilt dies auch für die Komplemente.
- Wichtig ist die richtige Bildung von Komplementen, Beispiel: $\overline{\{\text{„Mindestens ein Treffer"}\}} = \{\text{„Kein Treffer"}\}$.
- Für **Laplace-Experimente** gilt $P(A) = \frac{|A|}{|B|} = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$ (→ grund85.pdf).
- Mehrstufige Zufallsexperimente lassen sich oft (zumindest gedanklich) mit Baumdiagrammen veranschaulichen und mit den Pfadregeln berechnen (→ grund99.pdf).
- Für Zufallsexperimente mit Betrachtung von Ereignissen A/nicht-A und B/nicht-B eignet sich oft neben dem Baumdiagramm eine Vierfeldertafel, mit denen sich bedingte Wahrscheinlichkeiten $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ berechnen lassen (→ grund104.pdf).
- Nach dem Gesetz der großen Zahlen pendelt sich bei n-maliger unabhängiger Durchführung desselben Zufallsexperiments die relative Häufigkeit eines Ereignisses für $n \to \infty$ bei $P(E)$ ein (→ grund65.pdf).

Beispiel:
Ein Oktaeder (beschriftet mit 1–8) und ein Würfel (1–6) werden unabhängig nacheinander geworfen. Betrachtet werden die Ereignisse
A: „Oktaeder zeigt eine Zahl ≥ 3",
B: „Würfel zeigt eine Zahl ≥ 3",
C: „Würfel zeigt eine Zahl ≤ 2",
D: „Beide zeigen eine Zahl ≥ 3",
E: „Oktaeder oder Würfel zeigt eine Zahl ≥ 3",
F: „Höchstens einer zeigt eine Zahl ≥ 3",
G: „Keiner zeigt eine Zahl ≥ 3",
H: „Genau einer zeigt eine Zahl ≥ 3",
I: „Augensumme 12",
J: „Oktaeder zeigt Primzahl".

$P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$,
$P(C) = P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$,
$P(D) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2}$,
$P(E) = P(A \cup B) =$
$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{11}{12}$
$P(F) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = \frac{1}{2}$
$P(G) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = \frac{1}{12}$
$P(H) = P((\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})) =$
$= P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$
$= P(\overline{A}) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(\overline{B}) = \frac{5}{12}$.

$P(I) = P(\text{„66, 75, 84"}) = \frac{3}{8 \cdot 6} = \frac{1}{16}$. $P(J) = P(\text{„2, 3, 5, 7"}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.
$P(I \cap J) = P(\text{„75"}) = \frac{1}{8 \cdot 6} = \frac{1}{48} \neq \frac{1}{32} = P(I) \cdot P(J)$, also I und J abhängig.