

Grundbegriffe (\rightarrow grund85.pdf und \rightarrow ueb110.pdf, Aufgabe 1):

Alle möglichen Versuchsergebnisse eines Zufallsexperiments werden als Elemente eines **Grundraums** Ω zusammengefasst, dessen Teilmengen E die sog. **Ereignisse** sind. Jedem Ereignis E ist seine **Wahrscheinlichkeit** $P(E)$ zugeordnet. Diese Zuordnung P muss die **Kolmogorow-Axiome** erfüllen, aus denen die folgenden **Rechenregeln** folgen:

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E) \quad \text{und} \quad P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

Verknüpfte Ereignisse, Schreib- und Sprechweisen

\bar{E} (Komplement, Gegenereignis, nicht- E)

$E_1 \cap E_2$ (E_1 und E_2 , **beide** Ereignisse treten ein)

$E_1 \cup E_2$ (E_1 oder E_2 ; mindestens eines der Ereignisse tritt ein).

(In der Mathematik dürfen bei „oder“ auch beide Ereignisse eintreten, sofern nichts anderes dasteht).

$\overline{E_1 \cap E_2} = \bar{E}_1 \cup \bar{E}_2$ (Höchstens eines der Ereignisse tritt ein)

$\overline{E_1 \cup E_2} = \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2$ (keines der Ereignisse tritt ein)

$(\bar{E}_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap \bar{E}_2)$ (Genau eines der beiden Ereignisse tritt ein)

$E_1 \cap E_2 = \{\}$ (E_1 und E_2 sind unvereinbar, disjunkt)

Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse A, B heißen unabhängig, falls $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Hinweise

- Falls A und B unabhängig sind, so gilt dies auch für die Komplemente.
- Wichtig ist die richtige Bildung von Komplementen, Beispiel:
 $\{\text{„Mindestens ein Treffer“}\} = \{\text{„Kein Treffer“}\}.$
- Für **Laplace-Experimente** gilt $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$
 $(\rightarrow$ grund85.pdf).
- Mehrstufige Zufallsexperimente lassen sich oft (zumindest gedanklich) mit Baumdiagrammen veranschaulichen und mit den Pfadregeln berechnen (\rightarrow grund99.pdf).
- Für Zufallsexperimente mit Betrachtung von Ereignissen A /nicht- A und B /nicht- B eignet sich oft neben dem Baumdiagramm eine Vierfeldertafel, mit denen sich bedingte Wahrscheinlichkeiten $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ berechnen lassen (\rightarrow grund104.pdf).
- Nach dem Gesetz der großen Zahlen pendelt sich bei n -maliger unabhängiger Durchführung desselben Zufallsexperiments die relative Häufigkeit eines Ereignisses für $n \rightarrow \infty$ bei $P(E)$ ein (\rightarrow grund65.pdf).

Beispiel:

Ein Oktaeder (beschriftet mit 1–8) und ein Würfel (1–6) werden unabhängig nacheinander geworfen. Betrachtet werden die Ereignisse

A : „Oktaeder zeigt eine Zahl ≥ 3 “,

B : „Würfel zeigt eine Zahl ≥ 3 “,

C : „Würfel zeigt eine Zahl ≤ 2 “,

D : „Beide zeigen eine Zahl ≥ 3 “,

E : „Oktaeder oder Würfel zeigt eine Zahl ≥ 3 “,

F : „Höchstens einer zeigt eine Zahl ≥ 3 “,

G : „Keiner zeigt eine Zahl ≥ 3 “,

H : „Genau einer zeigt eine Zahl ≥ 3 “,

I : „Augensumme 12“,

J : „Oktaeder zeigt Primzahl“.

$$P(I) = P(\text{„66, 75, 84“}) = \frac{3}{8 \cdot 6} = \frac{1}{16}.$$

$$P(I \cap J) = P(\text{„75“}) = \frac{1}{8 \cdot 6} = \frac{1}{48} \neq \frac{1}{32} = P(I) \cdot P(J), \text{ also } I \text{ und } J \text{ abhängig.}$$

$$P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \quad P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

$$P(C) = P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

$$P(D) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2},$$

$$P(E) = P(A \cup B) =$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{11}{12}$$

$$P(F) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = \frac{1}{2}$$

$$P(G) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = \frac{1}{12}$$

$$P(H) = P((\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})) =$$

$$= P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap \bar{B}) =$$

$$= P(\bar{A}) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(\bar{B}) = \frac{5}{12}.$$

$$P(J) = P(\text{„2, 3, 5, 7“}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

