10. Klasse TOP 10 Grundwissen — 10
Eigenschaften von Funktionsgraphen — 09

Definitionsbereich (maximaler):
Kritisch sind: Brüche: Nenner gleich 0 setzen, liefert Definitionslücken;
Wurzeln: Radikand ≥ 0 setzen, liefert Definitionsbereich.
Beispiel: $f(x) = \frac{x^4-8x^2+16}{10x^2-10}$. Nenner $10x^2 - 10 = 0$ liefert $x_{1/2} = \pm 1$, also $D = \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$.

Grenzwerte im Unendlichen (d. h bei sehr großen x-Werten):
Vielen Funktionstermen sieht man das Verhalten für $x \to \pm\infty$ direkt an: So ist bei Polynomen die höchste Potenz (und deren Koeffizient) bestimmend, Exponentialfunktionen mit Basis $a > 1$ wachsen für $x \to +\infty$ ins Unendliche, Exponentialfunktionen mit Basis $a < 1$ nähern sich der x-Achse und Brüche mit unendlich großem Nenner gehen gegen 0.
Beispiele:
Für $h_1(x) = x^4 - 8x^2 + 16$ gilt (wegen „x^4") $\lim\limits_{x\to-\infty} h_1(x) \to +\infty$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} h_1(x) \to +\infty$.
Für $h_2(x) = -0{,}1x^3 + 16$ gilt (wegen „$-x^3$") $\lim\limits_{x\to-\infty} h_2(x) \to +\infty$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} h_2(x) \to -\infty$.
Für $h_3(x) = 1{,}04^x - 3$ gilt $\lim\limits_{x\to-\infty} h_3(x) = -3$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} h_3(x) \to +\infty$.
Für $h_4(x) = -\frac{4}{x-1}$ gilt $\lim\limits_{x\to-\infty} h_4(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} h_4(x) = 0$.
Bei Bruchfunktionen bietet sich an, mit der höchsten Potenz des Nenners zu kürzen.
Beispiele:

- $f(x) = \frac{x^4-8x^2+16}{10x^2-10}$. Mit x^2 kürzen, d. h. Zähler und Nenner durch x^2 dividieren:
  $f(x) = \dfrac{x^2 - 8 + \frac{16}{x^2}}{10 - \frac{10}{x^2}}$. Hier erkennt man nun, dass bei Einsetzen sehr großer x-Werte $\frac{16}{x^2}$ und $\frac{10}{x^2}$ gegen 0 gehen, so dass am verbleibenden Term das Verhalten für sehr große x-Werte bequem sichtbar ist: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-8}{10} \to \infty$.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x-1}{5x+3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4-\frac{1}{x}}{5+\frac{3}{x}} = \frac{4}{5}$.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x-1}{5x^3+3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{5+\frac{3}{x^3}} = 0$.

Symmetrie (spezielle): Punktsymmetrie zum Ursprung, falls $f(-x) = -f(x)$
Achsensymmetrie zur y-Achse, falls $f(-x) = f(x)$
Beispiele:
$f(x) = \frac{x^4-8x^2+16}{10x^2-10}$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse, denn

$$f(-x) = \frac{(-x)^4-8(-x)^2+16}{10(-x)^2-10} = \frac{x^4-8x^2+16}{10x^2-10} = f(x).$$

$h_5(x) = \frac{x^3-4x}{x^2+1}$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung, denn

$$h_5(-x) = \frac{(-x)^3-4(-x)}{(-x)^2+1} = \frac{-x^3+4x}{x^2+1} = \frac{-(x^3-4x)}{x^2+1} = -\frac{x^3-4x}{x^2+1} = -h_5(x).$$

Falls Symmetrie vorliegt, erleichtert dies später oft die Arbeit, z. B. beim Berechnen von Funktionswerten.

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:
Schnittpunkt einer Funktion f mit der y-Achse: Berechnung von $f(0)$.
Schnittpunkte mit der x-Achse (Nullstellen): Lösung der Gleichung $f(x) = 0$;
Beispiel: $f(x) = \frac{x^4-8x^2+16}{10x^2-10}$:
Nullstellen: $f(x) = 0$: $\frac{x^4-8x^2+16}{10x^2-10} = 0$; $x^4-8x^2+16 = 0$; binomische Formeln: $(x^2-4)^2 = 0$; $[(x+2)(x-2)]^2 = 0$; $x_{1/2} = -2$ (doppelt), $x_{3/4} = 2$ (doppelt). Somit $N_{1/2}(-2|0)$, $N_{3/4}(2|0)$.
Schnitt mit y-Achse: $f(0) = \frac{0^4-8\cdot 0^2+16}{10\cdot 0^2-10} = \frac{16}{-10} = -1{,}6$, also $Y(0|-1{,}6)$.

Für eine Skizze des Funktionsgraphen liefern diese Eigenschaften wertvolle Anhaltspunkte
Beispiel: $f(x) = \frac{x^4-8x^2+16}{10x^2-10}$
Der Skizze kann entnommen werden: f fällt für $x \in]-\infty; -2[$, steigt dann in $]-2; -1[$ und $]-1; 0[$, fällt in $]0; 1[$ und $]1; 2[$ und steigt dann wieder in $]2; \infty[$.