| 10. Klasse TOP 10 Grundwissen | 10 |
|---|---|
| **Polynomgleichungen, Polynom-Nullstellen** | **06** |



**Beispiel einer (Polynom-)Gleichung höheren (hier vierten) Grades**: $x^4 + 9x^2 - 2x = 6x^3$

1. Schritt: Gleichung nach 0 auflösen: $x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 2x = 0$

2. Schritt: Falls die Konstante fehlt, $x$ ausklammern: $x(x^3 - 6x^2 + 9x - 2) = 0$

Das Produkt ist 0, wenn einer der Faktoren 0 ist, also: $x_1 = 0$ oder ...

3. Schritt: $x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = 0$

Lösung „erraten“ (siehe unten): $x_2 = 2$

Polynomdivision durch „$x$ minus Lösung“: $(x^3 - 6x^2 + 9x - 2) : (x - 2) = x^2 - 4x + 1$

($\rightarrow$ grund105.pdf; die Polynomdivision muss aufgehen, andernfalls hat man beim Raten der Lösung oder bei der Polynomdivision einen Fehler gemacht).

Also ist $x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = (x - 2)(x^2 - 4x + 1)$, und dieser Ausdruck ist 0, wenn $x_2 = 2$ oder $x^2 - 4x + 1 = 0$ ist.

Das Verfahren (Lösung erraten, Polynomdivision) wird so lange durchgeführt, bis sich eine quadratische Gleichung ergibt.

4. Schritt: Löse die quadratische Gleichung: $x^2 - 4x + 1 = 0$

$$x_{3/4} = 2 \pm \sqrt{4 - 1} = 2 \pm \sqrt{3}$$

Die Lösungen sind also: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2 + \sqrt{3}$, $x_4 = 2 - \sqrt{3}$

Eine Gleichung $n$-ten Grades (hier 4. Grades) kann bis zu $n$ Lösungen haben.

**Faktorzerlegung:** $x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 2x = x(x - 2)(x - (2 + \sqrt{3}))(x - (2 - \sqrt{3}))$

(Koeffizienten der höchsten Potenz ausklammern [Beispiel siehe unten]; Faktoren „$x$ minus Lösung“; hier sieht man nochmals, dass das Produkt 0 ist, wenn einer der Faktoren 0 ist).

**Spezialfälle**

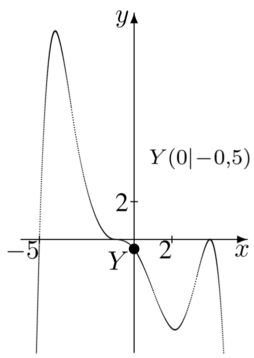
- Mehrfache Lösungen sind entsprechend zu kennzeichnen. Beispiel:
  $$-3x^3 - 12x^2 + 33x - 18 = 0, \text{ d. h. } -3(x^3 + 4x^2 - 11x + 6) = 0 \qquad (*)$$
  $x_1 = 1$. Polynomdivision $(x^3 + 4x^2 - 11x + 6) : (x - 1) = x^2 + 5x - 6$.
  $x_{2/3} = -2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 + 6}$, also $x_2 = 1$, $x_3 = -6$. Somit
  $x_{1/2} = 1$ doppelte Lösung, $x_3 = -6$ einfache Lösung,
  Faktorzerlegung $-3x^3 - 12x^2 + 33x - 18 = -3(x - 1)^2(x + 6)$.
- Bleibt im 3. Schritt eine quadratische Gleichung ohne Lösung, so ist keine weitere Faktorzerlegung möglich. Beispiel: $x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x - 2)(x^2 + 1)$

**Zum Erraten einer Lösung**

Kandidaten sind die Teiler der Konstanten. In $(*)$ kommen also $\pm 1$, $\pm 2$, $\pm 3$, $\pm 6$ in Frage.

(Denn: Beim umgekehrten Ausmultiplizieren der Faktorzerlegung erkennt man, dass die Konstante das Produkt der Lösungen ist).

In speziellen Situationen (z. B. Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen, Hinweise im Text einer Prüfungsaufgabe, biquadratische Gleichung $\rightarrow$ grund910.pdf) kann es vorkommen, dass eine Lösung schon bekannt ist oder andere Lösungsverfahren günstiger sind.




Bei der Berechnung von **Nullstellen von Polynomen** $f(x)$, also bei der Lösung der Gleichung $f(x) = 0$, gibt die Vielfachheit der Nullstellen wesentliche Auskunft über die Art der Nullstelle (einfache Nullstelle: $x$-Achse wird geschnitten; doppelte Nullstelle: $x$-Achse wird berührt; dreifache Nullstelle: Graph schmiegt sich an die $x$-Achse an mit Vorzeichenwechsel; siehe auch grund107.pdf).

Umgekehrt gelingt es mit der Faktorzerlegung, Funktionsterme zu Polynomen mit vorgegebenen Nullstellen zu finden. Ist z. B. der nebenstehende Graph mit den Nullstellen $-5$, $-1$ und $4$ gegeben, so kann ein Funktionsterm der Bauart $f(x) = a(x + 5)(x + 1)^3(x - 4)^2$ vermutet werden (durch Einsetzen des Punktes $(0|-0{,}5)$ findet man dann $a = -\frac{1}{160}$).