

Absolute und relative Häufigkeit → grund62.pdf

Mehrstufige Zufallsexperimente, Pfadregeln, Baumdiagramm → grund97.pdf

Formel von Bayes

Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B : $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Beispiel

Ein Bauunternehmer bezieht zum Terrassen-Pflastern 400 Steinplatten, und zwar zu $\frac{4}{5}$ Steinplatten I. Wahl (Anteil beschädigter Platten 5 %) und zu $\frac{1}{5}$ Platten II. Wahl (Anteil beschädigter Platten 15 %). Aus der Gesamt-Lieferung wird zufällig eine Platte herausgegriffen.

Frage: Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt eine beschädigte Platte aus der Lieferung I. Wahl? Oder anders formuliert: Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich unter der Bedingung, dass die Platte beschädigt ist, um eine Platte aus der I.-Wahl-Lieferung?

4-Felder-Tafel

Bei einer Aufteilung der Gesamtzahl nach mehreren Merkmalen kann man eine 4-Felder-Tafel erstellen, wobei die Zeilen bzw. Spalten jeweils mit Merkmal/nicht-Merkmal beschriftet werden und die Zahlen in jeder Zeile bzw. Spalte jeweils addiert werden (bzw. umgekehrt fehlende Felder auf diese Weise ergänzt werden).

In obigem Beispiel seien

W_1 : „Die zufällig gezogene Platte ist aus der I.-Wahl-Lieferung“ und

B : „Die zufällig gezogene Platte ist beschädigt“.

4-Felder-Tafel mit absoluten Häufigkeiten

	B	\bar{B}	
W_1	16	304	320
\bar{W}_1	12	68	80
	28	372	400

4-Felder-Tafel mit Wahrscheinlichkeiten

	B	\bar{B}	
W_1	0,04	0,76	0,80
\bar{W}_1	0,03	0,17	0,20
	0,07	0,93	100 % = 1

(Fett gedruckte Felder werden zuerst ausgefüllt (z. B. $320 = \frac{4}{5}$ von 400; im Feld $W_1 \cap B$: 5 % von 320 = 16 bzw. 5 % von $\frac{4}{5} = 0,05 \cdot 0,80 = 0,04$), für den Rest entsprechende Zeilen- bzw. Spaltensummen betrachtet.)

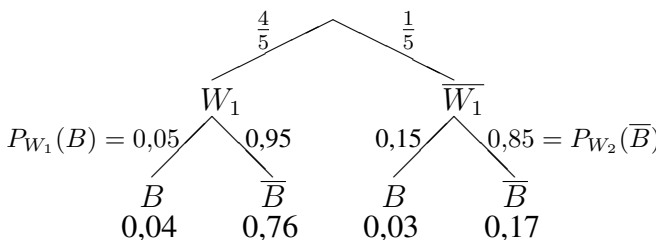
Lösung der obigen Frage mit absoluten Häufigkeiten: Hat man eine der 28 beschädigten Platten vor sich, von denen 16 aus der Lieferung I. Wahl stammen, so erkennt man:

$$P_B(W_1) = \frac{16}{28} = \frac{4}{7} \approx 57 \%$$

Lösung der obigen Frage mit Wahrscheinlichkeiten und der Formel von Bayes:

$$P_B(W_1) = \frac{P(W_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{0,04}{0,07} = \frac{4}{7} \approx 57 \%$$

Baumdiagramm



Bei den Beschriftungen der Äste der 2. Stufe B bzw. \bar{B} handelt es sich um bedingte Wahrscheinlichkeiten, z. B. Wahrscheinlichkeit für „beschädigt“ unter der Bedingung „I. Wahl“: $P_{W_1}(B) = 0,05$ usw.

Die unter den Pfaden stehenden Wahrscheinlichkeiten werden durch Anwendung der Pfadregeln (→ grund97.pdf) berechnet (Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten an den Ästen): $P(W_1 \cap B) = P(W_1) \cdot P_{W_1}(B) = \frac{4}{5} \cdot 0,05 = 0,04$ usw.

Für das aus den Pfaden $W_1 - B$ und $\bar{W}_1 - B$ zusammengesetzte Ereignis B gilt:

$$P(B) = 0,04 + 0,03 = 0,07.$$

Mit der Formel von Bayes berechnet man die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P_B(W_1) = \frac{P(W_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{0,04}{0,07} = \frac{4}{7} \approx 57 \%$$