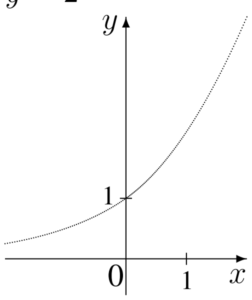
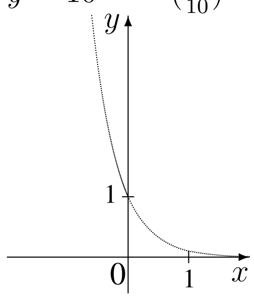
10. Klasse TOP 10 Grundwissen — 10
Exponential- und Logarithmusfunktion — 03

Exponentialfunktionen $f(x) = b \cdot a^x$ mit Wachstumsfaktor $a > 0$ und Anfangswert $b > 0$.

$y = 2^x$



$y = 10^{-x} = (\frac{1}{10})^x$



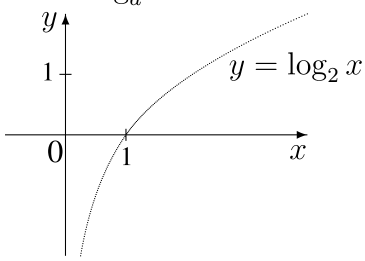
Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$
Wertebereich: $W = \mathbb{R}^+ =]0; \infty[$
Im Fall $a > 1$ steigt die Kurve streng monoton (und zwar bei genügend großen x-Werten beliebig steil; steiler als bei linearem oder quadr. Wachstum); für $x \to -\infty$ nähert sie sich der x-Achse (Asymptote).
Für $x = 0$ erhält man $f(0) = b \cdot a^0 = b \cdot 1 = b$.

Anwendungsbeispiele:

- Zins und Zinseszins: Ein Guthaben K steigt jedes Jahr um 5 %, d. h. mit Faktor 1,05. Nach x Jahren liegt dann das Guthaben $K \cdot 1{,}05^x$ vor (exponentiell steigend).
- Radioaktiver Zerfall: Der Vorrat an noch nicht zerfallenen Atomkernen fällt in einer gewissen Zeit jeweils auf die Hälfte. Nach x solchen Zeitabschnitten liegt dann nur noch $(\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$ von der Anfangsmenge vor (exponentiell fallend).
- Während beim exponentiellen Wachstum die Werte jede Zeiteinheit mit dem gleichen Faktor a multipliziert werden, wird beim linearen Wachstum jede Zeiteinheit die gleiche Zahl m addiert. So ergeben sich z. B. aus 100 Euro bei linearer Zunahme und jährlich $m = 20$ Euro nach 25 Jahren $100 + 25 \cdot 20$ Euro $= 600$ Euro, dagegen bei exponentieller Zunahme um 20 % sogar $100 \cdot 1{,}20^{25}$ Euro ≈ 9540 Euro.

Logarithmusfunktionen $f(x) = \log_a x$ zur Basis $a > 0$
sind Umkehrfunktionen der Exponentialfunktion, und zwar ist der Logarithmus zur Basis a die Umkehrung zur Exponentialfunktion mit Basis a.
Somit $\log_a a^x = x$ und $a^{\log_a x} = x$ sowie $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$.

$$x \underset{\log_a \ldots}{\overset{a^{\cdots}}{\rightleftarrows}} a^x$$



Definitionsbereich $D = \mathbb{R}^+ =]0; \infty[$
Wertebereich $W = \mathbb{R}$

Am Taschenrechner (TR) steht mit der log-Taste die Logarithmusfunktion zur Basis 10 zur Verfügung, also die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion mit der Gleichung $y = 10^x$.

Rechenregeln: $\log(ab) = \log a + \log b$ $\quad \log(\frac{a}{b}) = \log a - \log b$ $\quad \log(a^r) = r \log a$

$\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}$ (Basiswechsel $\to$ Formelsammlung/Merkhilfe; z. B. $\log_2 20 = \frac{\log_{10} 20}{\log_{10} 2} \overset{\text{TR}}{\approx} 4{,}3$)

Exponentialgleichungen
sind Gleichungen, in denen die Lösungsvariable x im Exponenten auftritt. Exponentialgleichungen löst man durch beidseitiges logarithmieren.

Beispiel:
Die Weltbevölkerung betrug 1990 ca. 5264 Millionen, 2006 ca. 6538 Millionen.
Modelliert man dies als exponentielles Wachstum mit Anfangswert $b = 5264 \cdot 10^6$, also $f(x) = b \cdot a^x$, so ist (16 Jahre später) $f(16) = 6538 \cdot 10^6 = 5264 \cdot 10^6 \cdot a^{16}$, also $a = \sqrt[16]{\frac{6538}{5264}} \approx 1{,}24^{\frac{1}{16}} \approx 1{,}0136$, d. h. das jähliche Wachstum beträgt ca. 1,36 %.
Danach Bevölkerungszahl im Jahr 2050: $f(60) = 5264 \cdot 10^6 \cdot 1{,}0136^{60} \approx 12 \cdot 10^9$.
Wann wird sich bei diesem Modell die Bevölkerungszahl im Vergleich zum Jahr 1990 verdoppelt haben? Antwort: Gesucht ist x mit $f(x) = 2 \cdot 5264 \cdot 10^6$, also die Lösung der Exponentialgleichung $2 = 1{,}0136^x$. Anwendung von log auf beiden Seiten: $\log 2 = \log 1{,}0136^x$; gemäß Rechenregel folgt $\log 2 = x \cdot \log 1{,}0136$, also $x = \frac{\log 2}{\log 1{,}0136} \approx 51$, also im Jahre 2041.