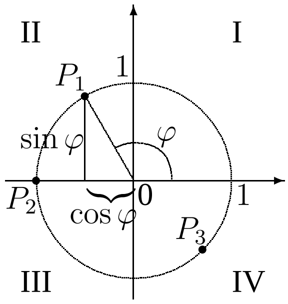
10. Klasse TOP 10 Grundwissen — 10

Trigonometrische Funktionen — 02

sin, cos, tan am rechtwinkligen Dreieck → grund97.pdf

Sinus, Kosinus am Einheitskreis (= Kreis mit Radius $r = 1$)



Beispiele (zum Winkel im Bogenmaß → grund101.pdf):
$\sin(\frac{2\pi}{3}) = \sin 120° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (Punkt P_1 in der Abbildung)
$\cos(\frac{2\pi}{3}) = \cos 120° = -\frac{1}{2}$
$\sin\pi = \sin 180° = 0$ (Punkt P_2 in der Abbildung)
$\cos\pi = \cos 180° = -1$
$\sin(-\frac{\pi}{4}) = \sin(-45°) = \sin(315°) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (Punkt P_3)
$\cos(-\frac{\pi}{4}) = \cos(-45°) = \cos(315°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

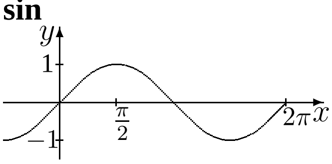
Ferner ergeben sich die Vorzeichen in den einzelnen Quadranten I–IV :

φ	$0° = 0$	I	$90° = \frac{\pi}{2}$	II	$180° = \pi$	III	$270° = \frac{3\pi}{2}$	IV	$360° = 2\pi$
$\cos\varphi$	1	+	0	–	-1	–	0	+	periodisch
$\sin\varphi$	0	+	1	+	0	–	-1	–	von vorne

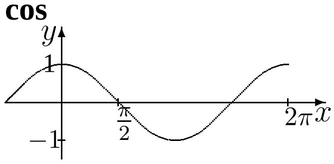
Ordnet man dem Winkel φ den jeweiligen Wert $\sin\varphi$ bzw. $\cos\varphi$ zu, so erhält man sin- bzw. cos-Funktion; dabei wird meist der Winkel im Bogenmaß verwendet und nun mit x bezeichnet.

Graphen

sin



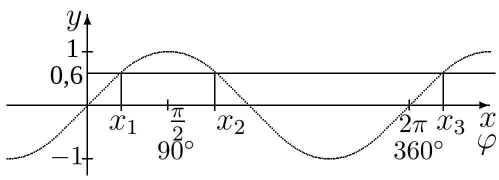
cos



Merke: Der cos-Graph geht im Koordinatensystem durch den Punkt $(0|1)$, der sin-Graph steigend durch den Punkt $(0|0)$. sin und cos sind 2π-periodisch.

Verschiebung, Streckung der Graphen/Einfluss von Parametern → grund108.pdf, ueb102.pdf

Eine grobe Skizze der Funktionsgraphen ist auch nützlich zum **Lösen trigonometrischer Gleichungen** in Hinblick darauf, dass es mehr als die vom Taschenrechner (TR) angezeigten Lösungen gibt. Beispiel: $5\sin x - 3 = 0$.
Nach Umformen folgt: $5\sin x = 3$, also $\sin x = 0{,}6$.
Nach Drücken von SHIFT-sin zeigt der TR im Bogenmaß $x_1 \approx 0{,}64$ als erste Lösung (TR auf RAD → grund101.pdf) bzw. im Gradmaß $\varphi_1 \approx 37°$ (TR auf DEG).



Aus der Zeichnung sieht man weitere Lösungen, nämlich $x_2 = \pi - x_1 \approx 2{,}50$, und alles 2π-periodisch, also $x_3 = x_1 + 2\pi \approx 6{,}93$, $x_1 + 4\pi$, $x_1 + 6\pi, \ldots$, allgemein $x_1 + 2k\pi \approx 0{,}64 + 2k\pi$ mit ganzer Zahl $k \in \mathbb{Z}$, und $x_2 + 2k\pi \approx 2{,}50 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Im Gradmaß ergibt sich entsprechend $\varphi_1 + k \cdot 360° \approx 37° + k \cdot 360°$ und $\varphi_2 + k \cdot 360° \approx 143° + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$.

Dreiecksberechnungen im allgemeinen Dreieck (im Lehrplan nicht verbindlich)
Je nach gegebenen Größen wählt man einen der folgenden Sätze:

Sinussatz:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

(Die Seitenlängen verhalten sich wie die Sinuswerte der gegenüberliegenden Winkel)

Beispiel → ueb102.pdf

Kosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

(„verallgemeinerter Pythagoras“)